GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ PENTRU GIMNAZIU

EDITURA HYPERION

CUPRINS

Algebră

Geometrie plană 83

Această lucrare a fost elaborată în conformitate cu programele școlare actuale aprobate de Ministerul Educației și Cercetării.

Comenzi pentru cărţile editurii noastre se pot face la următoarea adresă de e-mail:
edituhyperion@yahoo.de
sau la tel. / fax 0251-531133
sau la telefon 0744628656

Descrirea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
SCHNEIDER, GHEORGHE-ADALBERT
Memorator și îndrumar de matematică pentru gimnaziu / Gheorghe-Adalbert Schneider. - Craiova: Hyperion, 2020
Conține bibliografie
ISBN 978-606-589-055-8
51(075)

ALGEBRĂ

1. Mulțimi

1.1 Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență

1. Mulțimea este o noțiune primară, ea nu se definește.

Intuitiv, mulțimea reprezintă o colecție (grupare) de obiecte având o natură bine determinată, obiectele numindu-se **elemente**.

Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele unei mulțimi cu litere mici.

2. Fiind dată mulțimea A și a este un element al mulțimii A, atunci scriem $a \in A$ și citim a **aparține** lui A.

Fiind dată mulțimea A și a nu este un element al mulțimii A, atunci scriem $a \notin A$ și citim a **nu aparține** lui A.

3. Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează $\emptyset$.

Exemplu: $\{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x < 3\} = \emptyset$.

4. O mulțime A poate fi dată astfel:

a) prin enumerarea elementelor mulțimii între acolade, fiecare element al mulțimii scriindu-se o singură dată;

Exemple: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{1, 2, x, 5, y\}$.

b) cu ajutorul unei proprietăți ce caracterizează elementele mulțimii;

Exemple: **1.** A este mulțimea cifrelor pare. Mulțimea A se poate scrie $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. B este mulțimea literelor cuvântului **matematică.** Mulțimea B se poate scrie $B = \{m, a, t, e, i, c, ă\}$;

3. C este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 30 și care se împart exact la 5. Ea se poate scrie $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$.

4. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

5. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 3 \leq x < 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

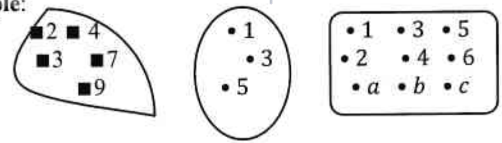
6. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x|8\} = \{1, 2, 4, 8\}$;

7. $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \vdots 4 \text{ și } x < 30\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$;

8. $A = \{x \in \mathbf{N}^* |\ 3 \leq x < 30 \text{ și } x \vdots 6\} = \{6, 12, 18, 24\}$.

c) cu ajutorul diagramei **Venn-Euler**;

Exemple:



5. Fiind dată mulțimea finită A, atunci numărul de elemente al mulțimii A se numește cardinalul lui A și se notează *card* A.

Exemple: *card* $\{1, 2, 3, 4\} = 4$; *card* $\{a, b, c\} = 3$.

6. Fiind date mulțimile A și B, spunem că mulțimile sunt egale și scriem $A = B$, dacă orice element din A aparține și mulțimii B și orice element din B aparține și mulțimii A.

Exemple: a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și B = mulțimea cifrelor impare.

b) $A = \{x \in \mathbf{N}^* |\ 3 \leq x < 10 \text{ și } x \vdots 2\}$ și $B = \{4, 6, 8\}$.

Observație. Două mulțimi egale au același cardinal.

1.2 Relația între două mulțimi. Submulțimi

1. Fiind date mulțimile A și B, spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Notăm $A \subset B$ și spunem că A este o **submulțime** a mulțimii B.

Exemple: a) Dacă $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$, atunci $A \subset B$.

b) Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{3, 5\}$ atunci $B \subset A$.

Observație. Evident $A \subset A$ și $\emptyset \subset A$.

2. Proprietăți ale relației de incluziune

1. $A \subset A$ - relația $\subset$ este reflexivă;
2. $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$ - relația $\subset$ este antisimetrică;
3. $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ - relația $\subset$ este tranzitivă.

1.3 Operații cu submulțimi

1. Numim **intersecția** mulțimilor A și B și notăm $A \cap B$, mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B.

Putem scrie: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Observație. Intersecția a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident $A \cap B = B \cap A$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 2, 7\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cap B = \{1, 2\}$.

2. Numim **reuniunea** mulțimilor A și B și notăm $A \cup B$, mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A și B.

Putem scrie: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Observație. Reuniunea a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident $A \cup B = B \cup A$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 5, 9\}$ și $B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$.

3. Numim **diferența** mulțimilor A și B și notăm $A - B$, mulțimea formată din elementele mulțimii A care nu aparțin mulțimii B.

Putem scrie: $A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{0, 1, 3, 4\}$, atunci $A - B = \{5, 7, 9\}$ și $B - A = \{0, 4\}$.

Observație. Diferența a două mulțimi nu este o operație comutativă, deoarece evident $A - B \neq B - A$. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că $A - B \neq$ $\neq B - A$.

4. Fiind dată mulțimea E și A o submulțime a lui E, numim complementara lui A în raport cu E mulțimea $E - A$, care se notează $C_E A$.

Putem scrie: $C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}$.

Exemplu: Dacă $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $A = \{1, 3\}$, atunci $C_E A = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

5. Numim **produs cartezian** al mulțimilor A și B și notăm $A\text{x}B$, mulțimea formată din toate perechile care au primul element din mulțimea A și al doilea element din mulțimea B.

Putem scrie: $A\text{x}B = \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Exemplu: Fiind date mulțimile $A = \{0, 1\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$, avem: $A\text{x}B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ și $B\text{x}A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$.

Observație. Produsul cartezian a două mulțimi nu este comutativ. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că $A\text{x}B \neq B\text{x}A$.

1.4 Aplicații

1. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 1, n = 1, 2, 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 8x + 7 = 71\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 11 \leq 5x + 1 < 31\}$.

Soluție. a) $n = 1 \Rightarrow x = 4, n = 2 \Rightarrow x = 7$ și $n = 3 \Rightarrow x = 10$. Atunci $A = \{4, 7, 10\}$.

b) $8x + 7 = 71 \Rightarrow 8x = 71 - 7 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$. Atunci: $B = \{8\}$.

c) $5x + 1 \geq 11 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow x \geq 2$ și $5x + 1 < 31 \Rightarrow 5x < 30 \Rightarrow x < 6$. Rezultă atunci că $2 \leq x < 6$ și cum $x \in \mathbf{N}$, rezultă $x = 2, 3, 4, 5$ și $C = \{2, 3, 4, 5\}$.

2. Se consideră mulțimile A, B:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 7 - 2k, k \in \mathbf{N}^*\}$

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 10 - 3k, k \in \mathbf{N}^*\}$.

Să se determine $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A\text{x}B, B\text{x}A$.

Soluție. Pentru mulțimea A: $k = 1 \Rightarrow x = 5, k = 2 \Rightarrow x = 3, k = 3 \Rightarrow x = 1$ și atunci $A = \{1, 3, 5\}$.

Pentru mulțimea B: $k = 1 \Rightarrow x = 7, k = 2 \Rightarrow x = 4, k = 3 \Rightarrow x = 1$ și atunci $B = \{1, 4, 7\}$.

Atunci avem: $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 4, 7\} = \{1\}$;

$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 4, 7\} = \{1, 3, 4, 5, 7\}$;

$A - B = \{1, 3, 5\} - \{1, 4, 7\} = \{3, 5\}$;

$B - A = \{1, 4, 7\} - \{1, 3, 5\} = \{4, 7\}$;

$A\text{x}B =$

$= \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (3, 1), (3, 4), (3, 7), (5, 1), (5, 4), (5, 7)\}$

$B\text{x}A =$

$= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (7, 1), (7, 3), (7, 5)\}$

3. Să se determine $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât să avem:

$$\{1, 3, x, 7, y, 11\} - \{1, 3, 7\} = \{5, 9, 11\}.$$

Soluție. Evident $\{1, 3, x, 7, y, 11\} - \{1, 3, 7\} = \{x, y, 11\} = \{5, 9, 11\} \Rightarrow x = 5, y = 9$.

4. Să se determine mulțimea X, știind că:

a) $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$;

b) $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție. Deoarece $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$ rezultă $4, 6 \in X$. Deoarece $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rezultă $1, 2 \in X$. Atunci $X = \{1, 2, 4, 6\}$.

5. Să se determine mulțimile X și Y, știind că:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $X \cap Y = \{1, 2\}$;

c) $5 \notin X - Y$;

d) mulțimea X are mai multe elemente decât mulțimea Y.

Soluție. Din $X \cap Y = \{1, 2\}$ rezultă $1, 2 \in X; 1, 2 \in Y$. Cum $5 \notin X - Y$ și $5 \notin X \cap Y$ rezultă $5 \in Y - X$, deci $5 \in Y$. Deoarece $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ rezultă că $3, 4 \in X$ sau $3, 4 \in Y$ sau $3 \in X$ și $4 \in Y$ sau $3 \in Y$ și $4 \in X$. Însă X are mai multe elemente decât Y și atunci rezultă că $3, 4 \in X$. Deci $X = \{1, 2, 3, 4\}$ și $Y = \{1, 2, 5\}$.

6. Determinați $x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$\{1, x, 7\} \cap \{3, y, 5\} = \{3, 7\}.$$

Soluție. $3 \in \{1, x, 7\} \Rightarrow x = 3$ și $7 \in \{3, y, 5\} \Rightarrow y = 7$.

2. Mulțimea numerelor naturale

2.1 Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal

1. Numerele naturale se scriu cu ajutorul cifrelor arabe care sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2. Șirul numerelor naturale este:
0, 1, 2, … , 11, 12, 13, … 101, 102, 103, … , 1001, 1002, 1003, …

Acest șir începe deci cu 0 și nu se termină, fiind infinit.

Oricare două numere alăturate ale șirului numerelor naturale diferă între ele prin 1 și se numesc numere naturale consecutive.

Exemple: 5 și 6; 12 și 13; 105 și 106; 1568 și 1569.

Mulțimea numerelor naturale se notează cu **N** și este:
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$.

Mulțimea numerelor naturale nenule se notează cu $\mathbf{N}^*$ și este:
$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$.

2. În viața de zi cu zi folosim sistemul de numerație zecimal, care utilizează în scrierea numerelor naturale cifrele arabe prezentate la 1. Conform acestui sistem avem:

a) un număr natural de 2 cifre se scrie $\overline{ab}$, unde a, b sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{ab} = 10a + b$.

b) un număr natural de 3 cifre se scrie $\overline{abc}$, unde a, b, c sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

c) un număr natural de 4 cifre se scrie $\overline{abcd}$, unde a, b, c, d sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$.

d) un număr natural de 5 cifre se scrie $\overline{abcde}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abcde} = 10\,000a + 1\,000b + 100c + {}$ $+10d + e$.

e) un număr natural de 6 cifre se scrie $\overline{abcdef}$, unde a, b, c, d, e, f sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abcdef} = 100\,000a + 10\,000b + 1000c + {}$ $+100d + 10e + f$.

În mod analog acest proces de scriere poate continua.

Exemple: $37 = 3 \cdot 10 + 7; 175 = 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5;$
$12\,349 = 1 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1.$

Aplicații.

a) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $\overline{aab}$.

Soluție. Cel mai mic număr se obține pentru cifra sutelor egală cu 1, adică $a = 1$. Căutăm acum cel mai mic număr de forma $\overline{11b}$. Acest număr se obține pentru $b = 0$ și este 110.

Cel mai mare număr se obține pentru cifra sutelor egală cu 9, adică $a = 9$. Căutăm acum cel mai mare număr de forma $\overline{99b}$. Acest număr se obține pentru $b = 9$ și este 999.

b) Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{1ab2}$ pentru care $a + b = 3$.

Soluție. Avem: $a + b = 3 \Rightarrow a = 0, b = 3; a = 1, b = 2;$ $a = 2, b = 1$ și $a = 3, b = 0$. Atunci numerele naturale sunt:
1032, 1122, 1212, 1302.

3. Numerele naturale se pot scriu și cu ajutorul cifrelor romane care sunt: I, V, X, L, C, D și M, care reprezintă respectiv numerele: 1, 5, 10, 50, 100, 500 și respectiv 1000.

Pentru scrierea și citirea numerelor naturale cu ajutorul cifrelor romane se aplică regulile:

a) Dacă se scrie o cifră cu valoare mai mică în dreapta uneia cu valoare mai mare, se indică adunarea celor două.

Exemple. XV = X + V = $10 + 5 = 15$; DX = D + X = 510.

b) Dacă se scrie o cifră cu valoare mai mică în stânga uneia cu valoare mai mare, se indică scăderea celei mici din cea mare.

Exemple. IC = C − I = $100 - 1 = 99$; VL = L − V = 45.

c) Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv de cel mult 3 ori.

d) Cifrele V, L, D nu se pot repeta consecutiv.

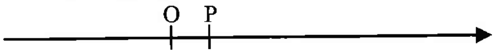
e) Nu se poate scădea mai mult de o cifră.

Exemplu. Numărul 48 îl scriem XLVIII și nu îl putem scrie IIL, deoarece IIL=50-1-1 și am încălca regula e).
f) Cifrele V, L, D nu se pot scădea.
g) O cifră sau un grup de cifre subliniate superior cu o linie se consideră multiplicate de 1 000 ori.

Exemple. a) $\overline{\mathrm{L}} = 50 \cdot 1\,000 = 50\,000$;
b) $\overline{\mathrm{VL}} = \mathrm{VL} \cdot 1\,000 = 45 \cdot 1\,000 = 45\,000$.

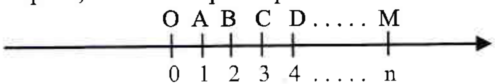
2.2 Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximarea și rotunjirea numerelor naturale

1. Numim **axă** a numerelor o dreaptă *d* pe care am fixat un punct O, numit **origine**, un sens pozitiv de parcurgere și un segment OP numit unitate de măsură.



Oricărui număr natural îi corespunde pe axa numerelor un punct.

Exemplu. Pe axa de mai jos, lui 0 îi corespunde punctul O, lui 1 punctul A, lui 2 punctul B, lui 3 punctul C, lui 4 punctul D și așa mai departe, lui n îi corespunde punctul M.



2. Pentru oricare două numere naturale a și b este adevărată una și numai una dintre afirmațiile: $a < b, a = b, a > b$.

Observație. Inegalitatea numerelor este tranzitivă, adică: $a < b$ și $b < c \Rightarrow a < c$.

3. Aproximarea prin lipsă până la zeci (sute, mii, etc) a unui număr natural este cel mai mare număr natural, mai mic sau egal decât numărul dat format numai din zeci(sute, mii, etc).

Exemple. Fiind dat numărul natural 12 457, atunci:

aproximarea prin lipsă până la zeci a lui este 12 450;
aproximarea prin lipsă până la sute a lui este 12 400;
aproximarea prin lipsă până la mii a lui este 12 000.

4. Aproximarea prin adaos până la zeci (sute, mii, etc) a unui număr natural este cel mai mic număr natural, mai mare sau egal decât numărul dat format numai din zeci(sute, mii, etc).

Exemple. Fiind dat numărul natural 12 457, atunci:
aproximarea prin adaos până la zeci a lui este 12 460;
aproximarea prin adaos până la sute a lui este 12 500;
aproximarea prin adaos până la mii a lui este 13 000.

5. Rotunjirea până la zeci (sute, mii, etc) a unui număr natural este aproximarea prin lipsă până la zeci (sute, mii, etc) sau prin adaos zeci (sute, mii, etc) care este mai apropiată de numărul natural dat. Dacă cele două aproximări sunt la fel de apropiate de numărul dat, atunci rotunjirea este dată de aproximarea prin adaos.

Exemple. Fiind dat numărul natural 12 457, atunci:
rotunjirea până la zeci a lui este 12 460;
rotunjirea până la sute a lui este 12 500;
rotunjirea până la mii a lui este 12 000.

Aplicații

a) Rotunjiți până la zeci toate numerele de forma $\overline{aba}$, unde a și b sunt cifre consecutive și crescătoare.

Soluție. Numerele de forma $\overline{aba}$ cu a și b consecutive și crescătoare sunt: 121, 232, 343, 454, 565, 676, 787, 898, iar numerele rotunjite sunt: 120, 230, 450, 570, 680, 790, 900.

b) Ordonați crescător toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, unde a, b, c sunt numere pare consecutive crescătoare.

Soluție. a fiind prima cifră a numărului, trebuie să fie diferită de 0. Atunci $a = 2, 4, 6$ sau 8. Dacă $a = 2$, atunci numărul este 246. Dacă $a = 4$, atunci numărul este 468. Pentru

$a = 6$ sau $a = 8$ nu obținem soluții. Deci numerele în ordine crescătoare sunt: 246 și 468.

2.3 Adunarea numerelor naturale

1. Fiind date numerele naturale a și b, există un număr natural c, unic, notat $a + b$ și care se numește suma numerelor a și b. Numerele a și b se numesc termenii sumei.

2. Proprietățile adunării numerelor naturale

a) Comutativitatea: $x + y = y + x$ $(\forall)x, y \in \mathbf{N}$;

b) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(\forall)x, y, z \in \mathbf{N}$;

c) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x$ $(\forall)x \in \mathbf{N}$.

Alte proprietăți:

a) $(\forall)x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x = y$ și $(\forall)z \in \mathbf{N}$, atunci are loc egalitatea: $x + z = y + z$.

b) $(\forall)x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x \le y$ și $(\forall)z \in \mathbf{N}$, atunci are loc egalitatea: $x + z \le y + z$.

c) $(\forall)x, y, z, u \in \mathbf{N}$, astfel încât $x = y$ și $z = u$, atunci are loc egalitatea: $x + z = y + u$.

d) $(\forall)x, y, z, u \in \mathbf{N}$, astfel încât $x \le y$ și $z \le u$, atunci are loc egalitatea: $x + z \le y + u$.

Observație. Foarte importantă în aplicații este suma:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplu. $1 + 2 + \cdots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225.$

Aplicații.

a) Scrieți pe 20 ca suma a două numere egale.

Soluție. Notăm cu x numerele egale și avem: $x + x = 20 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 10$.

b) Scrieți pe 63 ca suma a două numere naturale consecutive.

Soluție. Fie x și $x + 1$ cele două numere naturale consecutive. Atunci $x + x + 1 = 63 \Rightarrow x + x = 62 \Rightarrow x = 31$. Numerele sunt 31 și 32.

c) Reconstituiți adunarea: $\overline{1a7b} + \overline{43c5} = \overline{d604}$.

Soluție. $b + 5 = \overline{x4}$, unde $x = 0$ sau 1. Evident $x = 1$ și atunci $b + 5 = 14 \Rightarrow b = 9$. În continuare $7 + c + 1 = \overline{x0}$. Evident $x = 1$ și atunci $8 + c = 10 \Rightarrow c = 2$. În continuare $a + 3 + 1 = 6 \Rightarrow a = 2$. În sfârșit $1 + 4 = d \Rightarrow d = 5$.

Atunci adunarea este: $1279 + 4325 = 5604$.

2.4 Scăderea numerelor naturale

1. Fiind date numerele naturale a și b cu $a \ge b$, există un număr natural c, unic, notat $a - b$ și care se numește diferența numerelor a și b. Numărul a se numește descăzut, iar b scăzător.

Scăderea numerelor naturale nu este comutativă, nu este asociativă și nu are element neutru.

2. Proprietăți ale scăderii numerelor naturale:

a) $(\forall)x \in \mathbf{N}$, avem $x + 0 = x$.

b) $(\forall)x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x = y$ și $(\forall)z \in \mathbf{N}$, $z \le x$, $z \le y$, atunci are loc egalitatea: $x - z = y - z$.

b) $(\forall)x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x \le y$ și $(\forall)z \in \mathbf{N}$, $z \le x$, $z \le y$, atunci are loc inegalitatea: $x - z \le y - z$.

Exemplu. Calculați: $1998 + 5\,989 - 998 - 989$.

$1998 + 5\,989 - 998 - 989 = 1\,998 - 998 + 5\,989 - 989 =$
$= 1\,000 + 5\,000 = 6\,000$.

Aplicații.

a) Verificați egalitatea:

$5\,500 - 1\,500 - 1000 = 9\,000 - 3\,000 - 3\,000$.

Soluție. $5\,500 - 1\,500 - 1000 = 4\,000 - 1\,000 = 3\,000$.
$9\,000 - 3\,000 - 3\,000 = 6\,000 - 3\,000 = 3\,000$.