

LIBRIS

We know
books

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR
DE MATEMATICĂ
PENTRU GIMNAZIU**

EDITURA HYPERION

	perfect	54
	5.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv pătrat perfect	54
	5.3 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv care nu este pătrat perfect	55
	5.4 Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	56
	5.5 Operații cu numere reale de forma $a\sqrt{b}$, $b \in \mathbf{Q}$, $a > 0$	56
	5.6 Raționalizarea numitorului unei fracții, având numitorul irațional	57
6	Rapoarte și proporții	58
	6.1 Rapoarte și procente	58
	6.2 Proporții	59
	6.3 Mărimi direct proporționale. Regula de trei simplă	59
	6.4 Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă	60
	6.5 Media aritmetică	61
	6.6 Media aritmetică ponderată	61
	6.7 Probabilitatea realizării unor evenimente	62
	6.8 Aplicații	62
7	Calcul algebric	64
	7.1 Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	64
	7.2 Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere	64
	7.3 Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	65
	7.4 Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere	65
	7.5 Formule de calcul prescurtat	66
	7.6 Descompunerea în factori	66
	7.7 Rapoarte de numere reale reprezentate prin	

	litere. Operații cu acestea	68
	7.8 Inegalități	70
8	Funcții	72
9	Ecuatii și inecuații	75
	9.1 Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$	75
	9.2 Ecuatii de forma $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.	76
	9.3 Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$	77
	9.4 Inecuații de forma $ax + b > 0$ (≥ 0 , < 0 , ≥ 0) $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$	79
	9.5 Aplicații	79
10	Sisteme de ecuații și inecuații de gradul I	80
	10.1 Sisteme de ecuații de gradul I cu două necunoscute	80
	10.2 Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută	81
	10.3 Aplicații	82
	Geometrie plană	83
1.	Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta	83
	1.1 Punctul	83
	1.2 Dreapta	85
	1.3 Segmentul de dreaptă	88
	1.4 Semidreapta	89
2.	Unghiul	89
	2.1 Elementele și măsura unui unghi	90
	2.2 Clasificarea unghiurilor	90
	2.3 Congruența unghiurilor	90
	2.4 Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi	90
	2.5 Unghiuri opuse la vârf; congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct; suma măsurilor lor	92
3.	Congruența triunghiurilor	94
	3.1 Triunghi: definiție, elemente; clasificarea	

	triunghiurilor; perimetrul triunghiului	94
	3.2 Construcția triunghiurilor	96
	3.3 Congruența triunghiului oarecare	97
4.	Perpendicularitate	99
	4.1 Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	99
	4.2 Înălțimea în triunghi; concurența înălțimilor	99
	4.3 Criterii de congruență ale triunghiurilor dreptunghice: IC, IU, CC, CU	101
	4.4 Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi; simetria față de o dreaptă	102
5.	Paralelism	103
	5.1 Drepte paralele; construirea dreptelor paralele; axioma paralelelor	103
	5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	104
6.	Proprietăți ale triunghiurilor	107
	6.1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior	107
	6.2 Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi	108
	6.3 Proprietăți ale triunghiului isoscel	109
	6.4 Proprietăți ale triunghiului echilateral	111
	6.5 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	112
7	Patrulater	113
	7.1 Patrulaterul convex, suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	113
	7.2 Paralelogram; proprietăți	114
	7.3 Paralelograme particulare; dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți	116

	7.4 Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți	120
	7.5 Arii; calculul ariilor unor suprafețe	122
	7.6 Aplicații	125
8	Asemănarea triunghiurilor	126
	8.1 Raportul a două segmente, segmente proporționale	126
	8.2 Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales	126
	8.3 Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi	127
	8.4 Linia mijlocie în trapez; proprietăți	128
	8.5 Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării	128
	8.6 Aplicații	129
9	Relații metrice în triunghiul dreptunghic	131
	9.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă	131
	9.2 Teoreme importante, teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora	131
	9.3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic; sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi	132
	9.4 Rezolvarea triunghiului dreptunghic	133
	9.5 Aplicații	134
10	Cercul	135
	10.1 Cercul; definiție, elemente	135
	10.2 Unghi la centru; măsura arcelor; arce congruente	136
	10.3 Coarde și arce în cerc	136
	10.4 Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc	137
	10.5 Patrulater înscris în cerc; patrulater inscriptibil	137
	10.6 Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangenta dintr-un punct exterior la un cerc; triunghi circumscris unui cerc; patrulater	

	circumscriș unui cerc	138
	10.7 Poligoane regulate; calculul elementelor în triunghiul echilateral, pătrat, hexagon regulat	139
	10.8 Aplicații	140
	Geometrie în spațiu	141
1.	Relații între puncte, drepte și plane	141
	1.1 Puncte, drepte, plane; determinarea dreptei, determinarea planului	141
	1.2 Unghiul a două drepte în spațiu, drepte perpendiculare	141
	1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan; dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan	142
	1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele	143
	1.5 Aplicații	143
2.	Proiecții ortogonale pe un plan	146
	2.1 Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan	146
	2.2 Teorema celor trei perpendiculare	148
	2.3 Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare	149
3.	Corpuri geometrice	150
	3.1 Prisma regulată.	150
	3.2 Piramida regulată	153
	3.3 Trunchiul de piramidă regulată	156
	3.4 Corpuri rotunde	158
	3.4.1 Cilindrul circular drept	158
	3.4.2 Conul circular drept	160
	3.4.3 Trunchiul de con circular drept	161
	3.4.4 Sfera	162

Această lucrare a fost elaborată în conformitate cu programele școlare actuale aprobate de Ministerul Educației și Cercetării.

Comenzi pentru cărțile editurii noastre se pot face la următoarea adresă de e-mail:
editurahyperion@yahoo.de
sau la tel. / fax 0251-531133
sau la telefon 0744628656

Copyright © Editura Hyperion

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SCHNEIDER, GHEORGHE-ADALBERT

Memorator și îndrumar de matematică
pentru gimnaziu / Gheorghe-Adalbert Schneider. -
Craiova: Hyperion, 2020

Conține bibliografie

ISBN 978-606-589-055-8

51(075)

ALGEBRĂ

1. Mulțimi

1.1 Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență

1. Mulțimea este o noțiune primară, ea nu se definește.

Intuitiv, mulțimea reprezintă o colecție (grupare) de obiecte având o natură bine determinată, obiectele numindu-se **elemente**.

Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele unei mulțimi cu litere mici.

2. Fiind dată mulțimea A și a este un element al mulțimii A , atunci scriem $a \in A$ și citim a **aparține** lui A .

Fiind dată mulțimea A și a nu este un element al mulțimii A , atunci scriem $a \notin A$ și citim a **nu aparține** lui A .

3. Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează \emptyset .

Exemplu: $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 3\} = \emptyset$.

4. O mulțime A poate fi dată astfel:

a) prin enumerarea elementelor mulțimii între acolade, fiecare element al mulțimii scriindu-se o singură dată;

Exemple: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 2, x, 5, y\}$.

b) cu ajutorul unei proprietăți ce caracterizează elementele mulțimii;

Exemple: **1.** A este mulțimea cifrelor pare. Mulțimea A se poate scrie $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. B este mulțimea literelor cuvântului **matematică**. Mulțimea B se poate scrie $B = \{m, a, t, e, i, c, \tilde{a}\}$;

3. C este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 30 și care se împart exact la 5. Ea se poate scrie $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$.

4. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

5. $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq x < 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

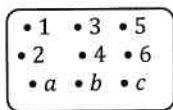
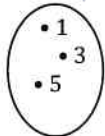
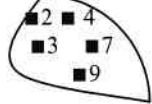
6. $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \mid 8\} = \{1, 2, 4, 8\}$;

7. $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x : 4 \text{ și } x < 30\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$;

8. $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq x < 30 \text{ și } x : 6\} = \{6, 12, 18, 24\}$.

c) cu ajutorul diagramei Venn-Euler;

Exemple:



5. Fiind dată mulțimea finită A , atunci numărul de elemente al mulțimii A se numește cardinalul lui A și se notează *card* A .

Exemplu: *card* $\{1, 2, 3, 4\} = 4$; *card* $\{a, b, c\} = 3$.

6. Fiind date mulțimile A și B , spunem că mulțimile sunt egale și scriem $A = B$, dacă orice element din A aparține și mulțimii B și orice element din B aparține și mulțimii A .

Exemplu: a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B =$ mulțimea cifrelor impare.

b) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq x < 10 \text{ și } x : 2\}$ și $B = \{4, 6, 8\}$.

Observație. Două mulțimi egale au același cardinal.

1.2 Relația între două mulțimi. Submulțimi

1. Fiind date mulțimile A și B , spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B . Notăm $A \subset B$ și spunem că A este o **submulțime** a mulțimii B .

Exemplu: a) Dacă $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$, atunci $A \subset B$.

b) Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{3, 5\}$ atunci $B \subset A$.

Observație. Evident $A \subset A$ și $\emptyset \subset A$.

2. **Proprietăți** ale relației de incluziune

- $A \subset A$ - relația \subset este reflexivă;
- $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$ - relația \subset este antisimetrică;
- $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ - relația \subset este tranzitivă.

1.3 Operații cu submulțimi

1. Numim **intersecția** mulțimilor A și B și notăm $A \cap B$, mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B .

Putem scrie: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Observație. Intersecția a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident $A \cap B = B \cap A$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 2, 7\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cap B = \{1, 2\}$.

2. Numim **reuniunea** mulțimilor A și B și notăm $A \cup B$, mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A și B .

Putem scrie: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Observație. Reuniunea a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident $A \cup B = B \cup A$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 5, 9\}$ și $B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$.

3. Numim **diferența** mulțimilor A și B și notăm $A - B$, mulțimea formată din elementele mulțimii A care nu aparțin mulțimii B .

Putem scrie: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{0, 1, 3, 4\}$, atunci $A - B = \{5, 7, 9\}$ și $B - A = \{0, 4\}$.

Observație. Diferența a două mulțimi nu este o operație comutativă, deoarece evident $A - B \neq B - A$. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că $A - B \neq B - A$.

4. Fiind dată mulțimea E și A o submulțime a lui E , numim **complementara** lui A în raport cu E mulțimea $E - A$, care se notează $C_E A$.

Putem scrie: $C_E A = \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin A\}$.

Exemplu: Dacă $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $A = \{1, 3\}$, atunci $C_E A = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

5. Numim **produs cartezian** al mulțimilor A și B și notăm $A \times B$, mulțimea formată din toate perechile care au primul element din mulțimea A și al doilea element din mulțimea B .

Putem scrie: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Exemplu: Fiind date mulțimile $A = \{0, 1\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$, avem: $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ și $B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$.

Observație. Produsul cartezian a două mulțimi nu este comutativ. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că $A \times B \neq B \times A$.

1.4 Aplicații

1. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 1, n = 1, 2, 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 8x + 7 = 71\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 11 \leq 5x + 1 < 31\}$.

Soluție. a) $n = 1 \Rightarrow x = 4, n = 2 \Rightarrow x = 7$ și $n = 3 \Rightarrow x = 10$. Atunci $A = \{4, 7, 10\}$.

b) $8x + 7 = 71 \Rightarrow 8x = 71 - 7 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$. Atunci: $B = \{8\}$.

c) $5x + 1 \geq 11 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow x \geq 2$ și $5x + 1 < 31 \Rightarrow 5x < 30 \Rightarrow x < 6$. Rezultă atunci că $2 \leq x < 6$ și cum $x \in \mathbf{N}$, rezultă $x = 2, 3, 4, 5$ și $C = \{2, 3, 4, 5\}$.

2. Se consideră mulțimile A, B :

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 7 - 2k, k \in \mathbf{N}^*\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 10 - 3k, k \in \mathbf{N}^*\}.$$

Să se determine $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A \times B, B \times A$.

Soluție. Pentru mulțimea A : $k = 1 \Rightarrow x = 5, k = 2 \Rightarrow x = 3, k = 3 \Rightarrow x = 1$ și atunci $A = \{1, 3, 5\}$.

Pentru mulțimea B : $k = 1 \Rightarrow x = 7, k = 2 \Rightarrow x = 4, k = 3 \Rightarrow x = 1$ și atunci $B = \{1, 4, 7\}$.

Atunci avem: $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 4, 7\} = \{1\}$;

$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 4, 7\} = \{1, 3, 4, 5, 7\};$$

$$A - B = \{1, 3, 5\} - \{1, 4, 7\} = \{3, 5\};$$

$$B - A = \{1, 4, 7\} - \{1, 3, 5\} = \{4, 7\};$$

$$A \times B =$$

$$= \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (3, 1), (3, 4), (3, 7), (5, 1), (5, 4), (5, 7)\}$$

$$B \times A =$$

$$= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (7, 1), (7, 3), (7, 5)\}$$

3. Să se determine $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât să avem:

$$\{1, 3, x, 7, y, 11\} - \{1, 3, 7\} = \{5, 9, 11\}.$$

Soluție. Evident $\{1, 3, x, 7, y, 11\} - \{1, 3, 7\} = \{x, y, 11\} = \{5, 9, 11\} \Rightarrow x = 5, y = 9$.

4. Să se determine mulțimea X , știind că:

a) $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$;

b) $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție. Deoarece $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$ rezultă $4, 6 \in X$. Deoarece $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rezultă $1, 2 \in X$. Atunci $X = \{1, 2, 4, 6\}$.

5. Să se determine mulțimile X și Y , știind că:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $X \cap Y = \{1, 2\}$;

c) $5 \notin X - Y$;

d) mulțimea X are mai multe elemente decât mulțimea Y .

Soluție. Din $X \cap Y = \{1, 2\}$ rezultă $1, 2 \in X; 1, 2 \in Y$. Cum $5 \in X - Y$ și $5 \notin X \cap Y$ rezultă $5 \in Y - X$, deci $5 \in Y$. Deoarece $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ rezultă că $3, 4 \in X$ sau $3, 4 \in Y$ sau $3 \in X$ și $4 \in Y$ sau $3 \in Y$ și $4 \in X$. Însă X are mai multe elemente decât Y și atunci rezultă că $3, 4 \in X$. Deci $X = \{1, 2, 3, 4\}$ și $Y = \{1, 2, 5\}$.

6. Determinați $x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$\{1, x, 7\} \cap \{3, y, 5\} = \{3, 7\}.$$

Soluție. $3 \in \{1, x, 7\} \Rightarrow x = 3$ și $7 \in \{3, y, 5\} \Rightarrow y = 7$.

2. Mulțimea numerelor naturale

2.1 Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal

1. Numerele naturale se scriu cu ajutorul cifrelor arabe care sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2. Șirul numerelor naturale este:
0, 1, 2, ..., 11, 12, 13, ... 101, 102, 103, ..., 1001, 1002, 1003, ...
Acest șir începe deci cu 0 și nu se termină, fiind infinit.

Oricare două numere alăturate ale șirului numerelor naturale diferă între ele prin 1 și se numesc numere naturale consecutive.

Exemple: 5 și 6; 12 și 13; 105 și 106; 1568 și 1569.

Mulțimea numerelor naturale se notează cu \mathbf{N} și este:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots\}.$$

Mulțimea numerelor naturale nenule se notează cu \mathbf{N}^* și este:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n, n + 1, \dots\}.$$

2. În viața de zi cu zi folosim sistemul de numerație zecimal, care utilizează în scrierea numerelor naturale cifrele arabe prezentate la 1. Conform acestui sistem avem:

a) un număr natural de 2 cifre se scrie \overline{ab} , unde a, b sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{ab} = 10a + b$.

b) un număr natural de 3 cifre se scrie \overline{abc} , unde a, b, c sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

c) un număr natural de 4 cifre se scrie \overline{abcd} , unde a, b, c, d sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$.

d) un număr natural de 5 cifre se scrie \overline{abcde} , unde a, b, c, d, e sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abcde} = 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10d + e$.

e) un număr natural de 6 cifre se scrie \overline{abcdef} , unde a, b, c, d, e, f sunt cifre, $a \neq 0$ și $\overline{abcdef} = 100\,000a + 10\,000b + 1\,000c +$

$+100d + 10e + f$.

În mod analog acest proces de scriere poate continua.

Exemple: $37 = 3 \cdot 10 + 7$; $175 = 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$;
 $12\,349 = 1 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1$.

Aplicații.

a) Scrieți cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma \overline{aab} .

Soluție. Cel mai mic număr se obține pentru cifra sutelor egală cu 1, adică $a = 1$. Căutăm acum cel mai mic număr de forma $\overline{11b}$. Acest număr se obține pentru $b = 0$ și este 110.

Cel mai mare număr se obține pentru cifra sutelor egală cu 9, adică $a = 9$. Căutăm acum cel mai mare număr de forma $\overline{99b}$. Acest număr se obține pentru $b = 9$ și este 999.

b) Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{1ab2}$ pentru care $a + b = 3$.

Soluție. Avem: $a + b = 3 \Rightarrow a = 0, b = 3; a = 1, b = 2; a = 2, b = 1$ și $a = 3, b = 0$. Atunci numerele naturale sunt:
1032, 1122, 1212, 1302.

3. Numerele naturale se pot scriu și cu ajutorul cifrelor romane care sunt: I, V, X, L, C, D și M, care reprezintă respectiv numerele: 1, 5, 10, 50, 100, 500 și respectiv 1000.

Pentru scrierea și citirea numerelor naturale cu ajutorul cifrelor romane se aplică regulile:

a) Dacă se scrie o cifră cu valoare mai mică în dreapta uneia cu valoare mai mare, se indică adunarea celor două.

Exemple. $XV = X + V = 10 + 5 = 15$; $DX = D + X = 510$.

b) Dacă se scrie o cifră cu valoare mai mică în stânga uneia cu valoare mai mare, se indică scăderea celei mici din cea mare.

Exemple. $IC = C - I = 100 - 1 = 99$; $VL = L - V = 45$.

c) Cifrele I, X, C, M pot fi scrise consecutiv de cel mult 3 ori.

d) Cifrele V, L, D nu se pot repeta consecutiv.

e) Nu se poate scădea mai mult de o cifră.

Exemplu. Numărul 48 îl scriem XLVIII și nu îl putem scrie III, deoarece III=50-1-1 și am încălca regula e).

f) Cifrele V, L, D nu se pot scădea.

g) O cifră sau un grup de cifre subliniate superior cu o linie se consideră înmulțite de 1 000 ori.

Exemple. a) $\overline{L} = 50 \cdot 1\,000 = 50\,000$;

b) $\overline{VL} = VL \cdot 1\,000 = 45 \cdot 1\,000 = 45\,000$.

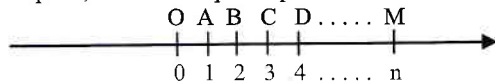
2.2 Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximarea și rotunjirea numerelor naturale

1. Numim **axă** a numerelor o dreaptă d pe care am fixat un punct O , numit **origine**, un sens pozitiv de parcurgere și un segment OP numit **unitate de măsură**.



Oricărui număr natural îi corespunde pe axa numerelor un punct.

Exemplu. Pe axa de mai jos, lui 0 îi corespunde punctul O , lui 1 punctul A , lui 2 punctul B , lui 3 punctul C , lui 4 punctul D și așa mai departe, lui n îi corespunde punctul M .



2. Pentru oricare două numere naturale a și b este adevărată una și numai una dintre afirmațiile: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Observație. Inegalitatea numerelor este tranzitivă, adică: $a < b$ și $b < c \Rightarrow a < c$.

3. Aproximarea prin lipsă până la zeci (sute, mii, etc) a unui număr natural este cel mai mare număr natural, mai mic sau egal decât numărul dat format numai din zeci (sute, mii, etc).

Exemple. Fiind dat numărul natural 12 457, atunci:

aproximarea prin lipsă până la zeci a lui este 12 450;

aproximarea prin lipsă până la sute a lui este 12 400;

aproximarea prin lipsă până la mii a lui este 12 000.

4. Aproximarea prin adaos până la zeci (sute, mii, etc) a unui număr natural este cel mai mic număr natural, mai mare sau egal decât numărul dat format numai din zeci (sute, mii, etc).

Exemplu. Fiind dat numărul natural 12 457, atunci:

aproximarea prin adaos până la zeci a lui este 12 460;

aproximarea prin adaos până la sute a lui este 12 500;

aproximarea prin adaos până la mii a lui este 13 000.

5. Rotunjirea până la zeci (sute, mii, etc) a unui număr natural este aproximarea prin lipsă până la zeci (sute, mii, etc) sau prin adaos zeci (sute, mii, etc) care este mai apropiată de numărul natural dat. Dacă cele două aproximări sunt la fel de apropiate de numărul dat, atunci rotunjirea este dată de aproximarea prin adaos.

Exemplu. Fiind dat numărul natural 12 457, atunci:

rotunjirea până la zeci a lui este 12 460;

rotunjirea până la sute a lui este 12 500;

rotunjirea până la mii a lui este 12 000.

Aplicații

a) Rotunjiți până la zeci toate numerele de forma \overline{aba} , unde a și b sunt cifre consecutive și crescătoare.

Soluție. Numerele de forma \overline{aba} cu a și b consecutive și crescătoare sunt: 121, 232, 343, 454, 565, 676, 787, 898, iar numerele rotunjite sunt: 120, 230, 450, 570, 680, 790, 900.

b) Ordonăți crescător toate numerele naturale de forma \overline{abc} , unde a, b, c sunt numere pare consecutive crescătoare.

Soluție. a fiind prima cifră a numărului, trebuie să fie diferită de 0. Atunci $a = 2, 4, 6$ sau 8 . Dacă $a = 2$, atunci numărul este 246. Dacă $a = 4$, atunci numărul este 468. Pentru

$a = 6$ sau $a = 8$ nu obținem soluții. Deci numerele în ordine crescătoare sunt: 246 și 468.

2.3 Adunarea numerelor naturale

1. Fiind date numerele naturale a și b , există un număr natural c , unic, notat $a + b$ și care se numește suma numerelor a și b . Numerele a și b se numesc termenii sumei.

2. Proprietățile adunării numerelor naturale

- a) Comutativitatea: $x + y = y + x$ (\forall) $x, y \in \mathbf{N}$;
- b) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (\forall) $x, y, z \in \mathbf{N}$;
- c) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x$ (\forall) $x \in \mathbf{N}$.

Alte proprietăți:

- a) (\forall) $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x = y$ și (\forall) $z \in \mathbf{N}$, atunci are loc egalitatea: $x + z = y + z$.
- b) (\forall) $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x \leq y$ și (\forall) $z \in \mathbf{N}$, atunci are loc egalitatea: $x + z \leq y + z$.
- c) (\forall) $x, y, z, u \in \mathbf{N}$, astfel încât $x = y$ și $z = u$, atunci are loc egalitatea: $x + z = y + u$.
- d) (\forall) $x, y, z, u \in \mathbf{N}$, astfel încât $x \leq y$ și $z \leq u$, atunci are loc egalitatea: $x + z \leq y + u$.

Observație. Foarte importantă în aplicații este suma:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplu. $1 + 2 + \dots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225.$

Aplicații.

a) Scrieți pe 20 ca suma a două numere egale.

Soluție. Notăm cu x numerele egale și avem: $x + x = 20 \Rightarrow x = 10.$

b) Scrieți pe 63 ca suma a două numere naturale consecutive.

Soluție. Fie x și $x + 1$ cele două numere naturale consecutive. Atunci $x + x + 1 = 63 \Rightarrow x + x = 62 \Rightarrow x = 31.$ Numerele sunt 31 și 32.

c) Reconstituieți adunarea: $\overline{1a7b} + \overline{43c5} = \overline{d604}.$

Soluție. $b + 5 = \overline{x4}$, unde $x = 0$ sau 1. Evident $x = 1$ și atunci $b + 5 = 14 \Rightarrow b = 9.$ În continuare $7 + c + 1 = \overline{x0}.$ Evident $x = 1$ și atunci $8 + c = 10 \Rightarrow c = 2.$ În continuare $a + 3 + 1 = 6 \Rightarrow a = 2.$ În sfârșit $1 + 4 = d \Rightarrow d = 5.$

Atunci adunarea este: $1279 + 4325 = 5604.$

2.4 Scăderea numerelor naturale

1. Fiind date numerele naturale a și b cu $a \geq b$, există un număr natural c , unic, notat $a - b$ și care se numește diferența numerelor a și b . Numărul a se numește descăzut, iar b scăzător.

Scăderea numerelor naturale nu este comutativă, nu este asociativă și nu are element neutru.

2. Proprietăți ale scăderii numerelor naturale:

- a) (\forall) $x \in \mathbf{N}$, avem $x + 0 = x.$
- b) (\forall) $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x = y$ și (\forall) $z \in \mathbf{N}$, $z \leq x$, $z \leq y$, atunci are loc egalitatea: $x - z = y - z.$
- b) (\forall) $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât $x \leq y$ și (\forall) $z \in \mathbf{N}$, $z \leq x$, $z \leq y$, atunci are loc inegalitatea: $x - z \leq y - z.$

Exemplu. Calculați: $1998 + 5\,989 - 998 - 989.$

$$1998 + 5\,989 - 998 - 989 = 1\,998 - 998 + 5\,989 - 989 = 1\,000 + 5\,000 = 6\,000.$$

Aplicații.

a) Verificați egalitatea:

$$5\,500 - 1\,500 - 1\,000 = 9\,000 - 3\,000 - 3\,000.$$

Soluție. $5\,500 - 1\,500 - 1\,000 = 4\,000 - 1\,000 = 3\,000.$
 $9\,000 - 3\,000 - 3\,000 = 6\,000 - 3\,000 = 3\,000.$